

УДК 512.815.7

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭПИМОРФНЫХ ПОДГРУПП

Алексей Владимирович Петухов

1. ВВЕДЕНИЕ \perp

Пусть есть аффинная алгебраическая группа G над алгебраически замкнутым полем \mathbb{K} характеристики 0 и её подгруппа H . Тогда стабилизатор всех векторов-функций для правого действия G на $\mathbb{K}[G]^H$ есть \hat{H} , обозримая оболочка H в G [1]. Для всякого G -модуля V верно, что $V^H = V^{\hat{H}}$ [1]. Это показывает интересность вычислений обозримых оболочек подгрупп и, в частности, определение подгрупп H , для которых $\hat{H} = G$, эпиморфных подгрупп. Подгруппа называется обозримой, если $\hat{H} = H$.

Определение 1. Пусть G полупростая алгебраическая группа, а H её редуцируемая подгруппа. Тогда ортогональным централизатором H в G называется подгруппа $Z_G^\perp(H)$, удовлетворяющая условиям

- (1) группа $Z_G^\perp(H)$ связна;
- (2) $\text{lie } Z_G^\perp(H) = \{z \in \text{lie } G : \forall h \in \text{lie } H \quad [z, h] = 0 \text{ и } (z, h) = 0\}$, где (\cdot, \cdot) форма Картана-Киллинга полупростой алгебры $\text{Lie } G$.

Каждой подгруппе H с алгеброй Ли \mathfrak{h} группы G с алгеброй Ли \mathfrak{g} можно сопоставить вектор $v_H \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$, соответствующий естественному вложению H в G . Заметим, что пространство $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ наделяется структурой G -модуля с помощью присоединённого действия группы Ли G на \mathfrak{g} . Здесь и далее $R_u(H)$ унитарный радикал группы H , а L_H какая-то подгруппа Леви группы H .

Теорема 1. Нередуцируемая подгруппа H полупростой группы G обозрима в ней, если и только если замыкание орбиты $Z_G^\perp(L_H)v_{R_u(H)}$ содержит \emptyset .

Теорема 2. Подгруппа H эпиморфна если и только если орбита $Z_G^\perp(L_H)v_{R_u(H)}$ замкнута, и H не содержится в собственной редуцируемой подгруппе.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА \perp

Здесь и далее G полупростая алгебраическая группа с алгеброй Ли \mathfrak{g} .

Определение 2. Полупростой элемент $s \in \mathfrak{g}$ называется рациональным, если оператор его присоединённого действия на \mathfrak{g} обладает рациональными собственными значениями.

Пусть $s \in \mathfrak{g}$ рациональный полупростой элемент. Пространство \mathfrak{g} есть $\bigoplus_{i \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_i$, где \mathfrak{g}_i собственные $\text{ad } s$ -подпространства с собственными значениями i . Пространства $\mathfrak{p}_s = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{q}_s = \{p \in \mathfrak{p}_s : (p, s) = 0\}$, $\mathfrak{n}_s = \bigoplus_{i > 0} \mathfrak{g}_i$ являются алгебраическими подалгебрами Ли в \mathfrak{g} . Алгебра \mathfrak{n}_s является нильпотентным радикалом \mathfrak{p}_s и \mathfrak{q}_s . Связная алгебраическая группа Q_s с алгеброй Ли \mathfrak{q}_s называется квазипараболической.

Теорема 3. [Критерий Суханова] Подгруппа $H \subset G$ обозрима в G если и только если существует рациональный полупростой элемент $s \in \mathfrak{g}$ такой, что $\text{lie } H \subset \mathfrak{q}_s$ и $\text{lie } R_u(H) \subset \mathfrak{n}_s$.

Следствие 1. Подгруппа $H \subset G$ эпиморфна в G если и только если она нередуктивна и $\text{lie } H$ не вложена ни в какую подалгебру \mathfrak{q}_s ни для какого ненулевого рационального полупростого элемента $s \in \mathfrak{g}$.

Предложение 1. Пусть $H' \subset H \subset G$ — цепочка вложенных алгебраических групп, причём H и H' редуктивны. Тогда $Z_G^\perp(H) \subset Z_G^\perp(H')$.

Замечание 1. Пусть подгруппа H' вложена в подгруппу H группы G , $R_u(H') \subset R_u(H)$, $0 \in \overline{Z_G^\perp(L_H)v_{R_u(H)}}$. Тогда $0 \in \overline{Z_G^\perp(L_{H'})v_{R_u(H)'}}$, где $L_{H'} \subset L_H$ — подгруппы Леви групп H' и H соответственно.

Доказательство. Верно, что $Z_G^\perp(L_H) \subset Z_G^\perp(L_{H'})$ откуда искомое утверждение и следует. \square

Предложение 2. Пусть $s \in \mathfrak{g}$ рациональный полупростой элемент. Тогда $0 \in \overline{Z_G^\perp(L_{Q_s})v_{R_u(Q_s)}}$

Доказательство. Пусть $\bar{s} : \mathbb{K}^* \rightarrow G$ однопараметрическая подгруппа, соответствующая s . Тогда $\lim_{t \rightarrow 0} \bar{s}(t)v_{R_u(Q_s)} = 0$. \square

Следствие 2. Если подгруппа H группы G обозрима в G , то $0 \in \overline{Z_G^\perp(L_H)v_{R_u(H)}}$.

Предложение 3. Если для подгруппы H группы G верно, что $0 \in \overline{Z_G^\perp(L_H)v_{R_u(H)}}$, то она обозрима в G .

Доказательство. Пусть $s \in \mathfrak{g}$ рациональный полупростой элемент, а V — представление группы G . Тогда $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Q}} V_i^s$, где V_i^s это s -собственные подпространства с собственными значениями i .

По критерию Гильберта-Мамфорда существует ненулевой рациональный полупростой элемент $s \in \text{lie } Z_G(L_H)$ такой, что $v_{R_u(H)} \in \bigoplus_{i > 0} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\text{lie } R_u H, \mathfrak{g}_i^s)$. Отсюда $\text{lie } R_u H \subset \mathfrak{n}_s$ и $\text{lie } R_u H \perp s$. Следовательно, $\text{lie } H \subset \mathfrak{q}_s$. \square

Следствие 2 и Предложение 3 вместе составляют Теорему 1.

Предложение 4. Пусть \hat{H} нередуктивна. Тогда орбита $Z_G^\perp(L_H)v_{R_u H}$ незамкнута.

Доказательство. По критерию Суханова существует рациональный полупростой элемент $s \in \mathfrak{g}$ такой, что $\text{lie } \hat{H} \subset \mathfrak{q}_s$, $\text{lie } R_u \hat{H} \subset \mathfrak{n}_s$. Тогда $\lim_{t \rightarrow 0} v_{R_u H} \in \text{Hom}(\text{lie } H, \text{lie } L_{\hat{H}})$. Если этот элемент лежит в $Z_G^\perp(L_H)v_H$, то $H^0 \subset L_{\hat{H}}$. Заметим, что $\dim L_{\hat{H}} < \dim \hat{H}$. \square

Предложение 5. Пусть нередуктивная группа H эпиморфна в G . Тогда орбита $Z_G^\perp(L_H)v_{R_u H}$ замкнута.

Доказательство. Предположим противное. По критерию Гильберта-Мамфорда существует рациональный полупростой элемент $s \in Z_G^\perp(L_H)$ такой, что $v_{R_u H} \in \bigoplus_{i \geq 0} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\text{lie } R_u H, \mathfrak{g}_i^s)$. Отсюда $\text{lie } R_u H \subset \mathfrak{p}_s$. Пусть P_s алгебраическая подгруппа Ли в G с алгеброй Ли \mathfrak{p}_s . Тогда $R_u H \subset P_s$. Легко видеть, что $P_s/Q_s \cong \mathbb{K}^*$, и, следовательно, $R_u H \subset Q_s$. Отсюда $\text{lie } H \subset \mathfrak{q}_s$. \square

Предложения 4 и 5 составляют доказательство Теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Grosshans F.D., *Algebraic Homogeneous Spaces and Invariant Theory*, Lecture Notes in Math. 1673 Springer-Verlag, 1997 год
- [2] Богомолов Ф.А., *Голоморфные тензоры и векторные расслоения на проективных пространствах*, Изв. АН СССР Серия Мат. 42 №6, стр. 1227-1287, 1979 год
- [3] Bien, F., Borel, A., *Sous-groupes epimorphiques des groupes lineaires algebriques II*, C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I 315, стр. 1341-1346, 1992 год

Кафедра высшей алгебры механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва, ГСП-2, Воробьёвы горы Jacobs University Bremen, Mathematics Department, Bremen, Campus Ring 1, D-28759

A GEOMETRIC DESCRIPTION OF EPIMORPHIC SUBGROUPS

ALEXEY PETUKHOV

1. INTRODUCTION

Let G be an algebraic group over an algebraically closed field \mathbb{K} of characteristic 0 and let $H \subset G$ be a subgroup. Let $\hat{H} \subset G$ be a subgroup of G which preserves all elements of a subset $\mathbb{K}[G]^H \subset \mathbb{K}[G]$. We call the subgroup \hat{H} an observable hall of H in G [1]. It is well known that for any finite-dimensional G -module V the space V^H coincides with $V^{\hat{H}}$ [1]. This property motivates the definition of an observable hall. A subgroup H is called epimorphic in G if $\hat{H} = G$. A subgroup H is called observable in G if $\hat{H} = H$.

Definition 1. Let G be a semisimple algebraic group and let $H \subset G$ be a reductive subgroup. Orthogonal centralizer to H in G is a subgroup $Z_G^\perp(H)$ satisfying the following conditions:

- 1) Group $Z_G^\perp(H)$ is irreducible;
- 2) $\text{lie } Z_G^\perp(H) = \{z \in \text{lie } G : \forall h \in \text{lie } H [z, h] = 0 \text{ \& } (z, h) = 0\}$. There (\cdot, \cdot) is the Cartan-Killing form of $\text{lie } G$.

Let $H \subset G$ be a subgroup. Let $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ be Lie algebras of G and H respectively. The subgroup $H \subset G$ determines vector $v_H \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$. The space $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ has an action of G induced from the adjoint G -action on \mathfrak{g} . Let $R_u H$ be a unipotent radical of H and L_H be a maximal reductive subgroup of H (i.e. Levi subgroup).

Theorem 1. Nonreductive algebraic subgroup H of a reductive algebraic group G is observable in G if and only if the closure of the $Z_G^\perp(L_H)$ -orbit of $v_{R_u(H)}$ contains 0.

Theorem 2. Nonreductive algebraic subgroup H of a reductive algebraic group G is epimorphic in G if and only if the $Z_G^\perp(L_H)$ -orbit of $v_{R_u(H)}$ is closed and H is not contained in a proper reductive subgroup of G .

2. PROOFS OF THE THEOREMS 1 AND 2

Definition 2. A semisimple element $s \in \mathfrak{g}$ is called rational if and only if all ads -eigenvalues are rational numbers.

Let $s \in \mathfrak{g}$ be a rational semisimple element. It determines direct sum decomposition $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_i$, where \mathfrak{g}_i is the i -eigenspace of ads . Spaces $\mathfrak{p}_s := \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{q}_s := \{p \in \mathfrak{p}_s : (p, s) = 0\}$ and $\mathfrak{n}_s := \bigoplus_{i > 0} \mathfrak{g}_i$ are algebraic Lie subalgebras of \mathfrak{g} . The Lie algebra \mathfrak{n}_s is the nilpotent radical of both \mathfrak{p}_s and \mathfrak{q}_s . Let Q_s be an irreducible algebraic Lie group with the Lie algebra \mathfrak{q}_s .

Theorem 3 (Sukhanov's criterion [1]). A subgroup H of G is observable in G if and only if there exists a rational semisimple element $s \in \mathfrak{g}$ such that $\text{lie } H \subset \mathfrak{q}_s$ and $\text{lie } R_u(H) \subset \mathfrak{n}_s$.

Corollary 1. A subgroup H of G is epimorphic in G if and only if $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{q}_s$ for any nonzero rational semisimple element $s \in \mathfrak{g}$.

Proposition 1. Let $H' \subset H \subset G$ be a chain of reductive algebraic groups. Then $Z_G^\perp(H) \subset Z_G^\perp(H')$.

Proof. A proof left to the reader. □

Lemma 1. Let H', H be subgroups of G and (a) $H' \subset H$; (b) $R_u H' \subset R_u H$; (c) $0 \in \overline{Z_G^\perp(L_H) v_{R_u H}}$. Then $0 \in \overline{Z_G^\perp(L_{H'}) v_{R_u H'}}$.

Proof. A proof left to the reader. □

Proposition 2. Let $s \in \mathfrak{g}$ be a rational semisimple element. Then $0 \in \overline{Z_G^\perp(L_{Q_s}) v_{R_u Q_s}}$.

Proof. Let $\bar{s} : \mathbb{K}^* \rightarrow G$ be a 1-parametric subgroup corresponding to s . Then $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{s}(t)v_{R_u Q_s}$ equals 0. \square

Corollary 2. Let H be an observable subgroup of G . Then $0 \in \overline{Z_G^\perp(L_H)v_{R_u H}}$.

Proposition 3. Let H be a subgroup of G . Suppose $0 \in \overline{Z_G^\perp(L_H)v_{R_u H}}$. Then H is observable in G .

Proof. Let s be a rational semisimple element and V be a G -module. Then $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Q}} V_i^s$, where V_i^s is the i -eigenspace of s .

There exists a nonzero rational semisimple element $s \in \mathfrak{g}$ such that $v_{R_u H} \in \bigoplus_{i > 0} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\text{lie } R_u H, \mathfrak{g})_i^s$ (Hilbert-Mumford criterion). Hence $\bigoplus_{i > 0} \text{Hom}(\text{lie } R_u H, \mathfrak{g})_i^s = \text{Hom}(\text{lie } R_u H, \mathfrak{n}_s)$, $\text{lie } H$ contained in \mathfrak{n}_s . Therefore $\text{lie } H \subset \mathfrak{q}_s$ and hence $\text{lie } R_u H \subset \mathfrak{n}_s$, the subgroup $H \subset G$ is observable in G . \square

Corollary 2 and Proposition 3 are equivalent to Theorem 1.

Proposition 4. Let H be a subgroup of G and suppose \widehat{H} is not reductive. Then the $Z_G^\perp(L_H)$ -orbit of $v_{R_u H}$ is not closed.

Proof. Hence \widehat{H} is not reductive, there exists a nonzero rational semisimple element $s \in \mathfrak{g}$ such that $\text{lie } \widehat{H} \subset \mathfrak{q}_s$ and $\text{lie } R_u \widehat{H} \subset \mathfrak{n}_s$. Without loss of generality we assume that $\text{lie } L_{\widehat{H}} \subset \mathfrak{g}_0^s$. Let \bar{s} be a corresponding to s homomorphism $\mathbb{K}^* \rightarrow G$. Then limit $\bar{v} := \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{s}(t)v_{R_u H}$ exists and lies in $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\text{lie } R_u H, \text{lie } L_{\widehat{H}})$. If $\bar{v} \in Z_G^\perp(L_H)v_{R_u H}$ then \mathfrak{h} contained in a subalgebra conjugated to $\text{lie } L_{\widehat{H}}$. Obviously $\dim L_{\widehat{H}} < \dim \widehat{H}$. Contradiction. Therefore $\bar{v} \in \overline{Z_G^\perp(L_H)v_{R_u H}}$ and $\bar{v} \notin Z_G^\perp(L_H)v_{R_u H}$. \square

Proposition 5. Let H be a proper epimorphic subgroup of G . Then the $Z_G^\perp(L_H)$ -orbit of $v_{R_u H}$ is closed.

Proof. Suppose the $Z_G^\perp(L_H)$ -orbit of $v_{R_u H}$ is not closed. Then there exists a nonzero rational semisimple element $s \in \text{lie } Z_G^\perp(L_H)$ such that $v_{R_u H} \in \bigoplus_{i \geq 0} \text{Hom}(\text{lie } R_u H, \mathfrak{g})_i^s$ (Hilbert-Mumford criterion). Hence $\bigoplus_{i \geq 0} \text{Hom}(\text{lie } R_u H, \mathfrak{g})_i^s = \text{Hom}(\text{lie } R_u H, \mathfrak{p}_s)$, $\text{lie } R_u H$ contained in \mathfrak{p}_s . Let $P_s \subset G$ be an irreducible subgroup such that $\text{lie } P_s = \mathfrak{p}_s$. Obviously $P_s/Q_s \cong \mathbb{K}^*$ and hence $R_u H \subset R_u P_s$ and there are no homomorphisms from $R_u H$ to \mathbb{K}^* , $R_u H$ contained in Q_s . Therefore $\text{lie } H \subset \mathfrak{q}_s$. \square

Propositions 4 and 5 are equivalent to Theorem 2.

REFERENCES

- [1] Grosshans F.D., *Algebraic Homogeneous Spaces and Invariant Theory*, Lecture Notes in Math. 1673 Springer-Verlag, 1997
- [2] Bien, F., Borel, A., *Sous-groupes epimorphiques des groupes lineaires algebriques II*, C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I 315, p. 1341-1346, 1992

CHAIR OF HIGHER ALGEBRA, MATHEMATICAL DEPARTMENT, MOSCOW STATE UNIVERSITY NAMED AFTER M.V. LOMONOSOV
JACOBS UNIVERSITY BREMEN, GERMANY D-28759